Халява, приди! 128 вопросов - не 128 бит:
В головы не влезает - влезает лишь в int!
Ловим на халяву, ловим на приманку ли
Дайте что угодно, кроме функций Ханкеля!

Сабж:

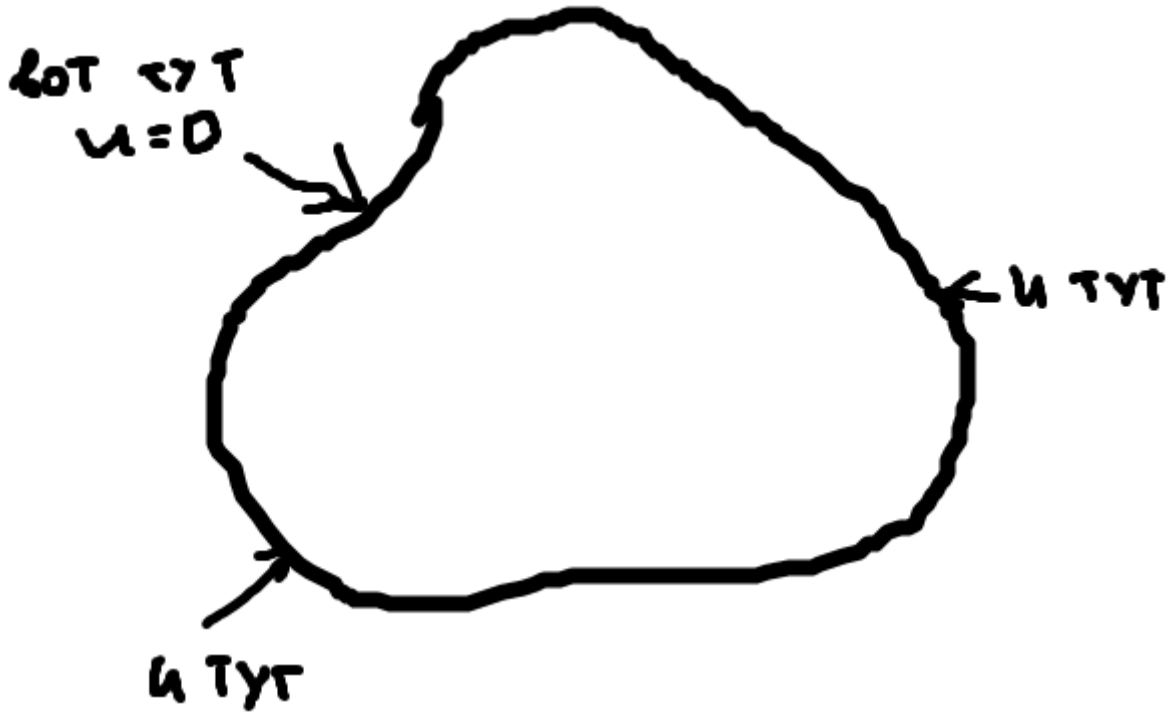
Теорема 11.3.3 (Теорема Стеклова).
Произвольная дважды непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $\bar{D}$ функция $f(M)$, удовлетворяющая граничному условию

$$f(P) = 0$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным значениям и собственным функциям задачи Дирихле.

Сабж находится в самом-самом конце лекций.

Давайте пожуём данную теорему вместе. Вот у нас есть замкнутая область D с **однородными ГУ Дирихле:**



И у неё свое семейство СФ $\varphi_n(M)$ с СЗ (λ_n).

Вот смотрите, пикча:

Дети – это собственные функции. У них в руках игрушки – это их СЗ. А за всем этим наблюдает мама – область D, у которой и есть эти «детки»- собственные функции.

Теорема Стеклова утверждает следующее: любую функцию в области D мы можем разложить по системе СФ этой области D!

Вот приходит в гости функция f(M)… а на неё уже навалились все дети. Разложили её по себе, т.е. СФ:

$$f(M)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(M)$$

Правда, на гостью f(M) накладывается требование. Требуется, чтобы на границе она была 0. Это требование вполне естественно, если мы посмотрим на формулу. Ведь все СФ на границе сами нули. Каждое слагаемое на границе области будет 0. Естественно, что и сумма тогда тоже.

Теперь к нашей семье приходят органы опеки и спрашивают: мама-область D, а откуда у вас ***бесконечное*** число детей?

$$f(M)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(M)$$

Да и откуда у вас вообще есть дети? Может, вы какая-нибудь поганая область (а область тут произвольная, это не обязательно круг или шар, это может быть ужасная невыпуклая клякса).

Что ответить маме? А ей следует сказать: ребята, есть интуры! Задача поиска СФ в области сводится к интегральному уравнению Фредгольма в этой области. А тут мама подрубает знания интуров из 4 сема:
СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЕСТЬ И ИХ БЕСКОНЕЧНО МНОГО (НО СЧЁТНОЕ ЧИСЛО!)
СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЕСТЬ И ИХ БЕСКОНЕЧНО МНОГО (НО СЧЁТНОЕ ЧИСЛО!)

Круто: и игрушек бесконечно много, и детей бесконечно много.
А мамаша продолжает атаковать:
ВСЕ ИГРУШКИ У МЕНЯ ХОРОШИЕ! ВСЕ СЗ >0!
И это правда: все СЗ будут >0.

Ещё, само собой (очень важно для органов опеки): у каждого ребёнка есть своя игрушка. А то знаете, бывает в некоторых семьях, что на одно СЗ приходится целое линейное пространство СФ ранга 2 или 3… К счастью, в семьях СФ и СЗ, порождённых из ЗШЛ, на одно СЗ приходится одна СФ (с точностью до коэффициента, конечно).

Единственное, что расстроило органов опеки – это то, что дети играются только со своими игрушками-СЗ, но с друг другом не общаются. Дело в том, что все СФ ортогональны, т.е. интеграл от их произведения по области D будет 0:

$$\int_D \varphi_n(M)\varphi_m(M)\,dV(M)=0,$$
$$\text{если } m\neq n$$

Замечание. Всё вышесказанное терпит обобщение на случай, если уравнение на СФ выглядит не так

$\Delta u+\lambda u=0$

А вот так

$\Delta u+\lambda u*\rho(M)=0$

Главное, чтобы весовая функция $\rho(M)$ была всюду положительной в D!

Единственное отличие будет в том, что чуть-чуть поменяется определение скалярного произведения двух функций:

$$\int_D \varphi_n(M)\varphi_m(M)\rho(M)\,dV(M)=0,$$
$$\text{если } m\neq n$$

Также отмечу, что в 4-й главе Боголюбов пишет кучу теорем:

Теорема 4.2.2 (Теорема Стеклова). *Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе полиномов Лежандра, то есть если*

$f(x) \in C[-1,1]^{(2)}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x)$$

где

$$f_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

Теорема 4.2.5 (Теорема Стеклова). *Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, обращающаяся в ноль на концах отрезка, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по $\{P_n^{(m)}(x)\}$, то есть если $f(x) \in C[-1,1]^{(2)}$, $f(-1) = f(1) = 0$, то*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x)$$

где

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^{(m)}(x) dx$$

Теорема 4.2.7 (Теорема Стеклова). *Всякая дважды непрерывно дифференцируемая на Ω функция $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по $\{Y_n^{(m)}(x)\}$:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n Y_n^{(m)}(x)$$

где

$$f_n = \frac{2n+1}{2\pi(1+\delta_0^m)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} f(x) Y_n^{(m)}(x) dx$$

Это всё частные случаи той теоремы Стеклова.

39. Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.

43. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.

45. Является ли система сферических функций замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения. Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.

Для сферических функций они – СФ сферы. А для полиномов Лежандра, также как для ПФЛ, Боголюбов чуть ли не явно писал задачи Штурма-Лиувилля.

Давайте, кстати, на них посмотрим.

Для полиномов Лежандра:

2. Система $\{P_n(x)\}$ определяет все СФ ЗШЛ:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right) + \lambda y(x) = 0,\ x \in (-1,1) \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

Для присоединённых функций Лежандра:

Система $\{P_n^{(m)}(x)\}$ исчерпывает все СФ ЗШЛ:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\dfrac{dy}{dx}\right)+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0,\ x\in(-1,1) \\ |y(\pm 1)|<\infty \end{cases}$$

Лайфхак: выучите только ЗШЛ для ПФЛ, а если вам выпадут просто полиномы Лежандра, положите m=0 ☺

А вот написать задачу Ш-Л для сферы очень просто:
$\Delta_{\theta\varphi}Y+\lambda Y=0$,
$Y(\theta,\varphi+2\pi)=Y(\theta,\varphi)$.
Всё ☺

Вот мы ответили на вопросы 40 и 44:

40. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра.

44. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для сферических функций.